1a) zie French blz 51 en 52. Als $y \ll x$ dan geldt $y \approx \frac{x^2}{2L}$ want $x^2 = 2Ly - y^2 \approx 2Ly$. Energiebehoud: $\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E$. $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \approx \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$
$\Rightarrow \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Mg}{L}x^2 = E$. $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow M\frac{d^2x}{dt^2} + M\frac{g}{L}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0$

b) $M\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mg}{L}x + b\frac{dx}{dt} = F_0 \cos\omega t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{L}x = F_0/M \cos\omega t$

$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{M}{b}\sqrt{\frac{g}{L}}$

c) zie French blz 84 en 85

d) Grotere massa: ω_0 verandert niet, γ wordt kleiner $\Rightarrow$ Q wordt groter.
$\Rightarrow$ Amplitude wordt groter en fase-overgang wordt steiler, maar fase zal wel gelijk blijven $(= \pi/2)$

Grotere lengte: ω_0 wordt kleiner, γ blijft gelijk $\Rightarrow$ Q wordt kleiner $\Rightarrow$ maximale amplitude bij ω_m wordt kleiner. Fase wordt groter dan $\pi/2$, dus amplitude slingerbeweging zal veel kleiner worden

e) zie French blz 98, 99 en 100. Als resonantiecurve erg smal is, zullen de vrije oscillaties langzaam uitdoven, want de amplitude van deze oscillaties neemt af volgens: $A(t) = A_0 e^{-\gamma t/2}$ (formule 3-35) en gevonden is dat $2\Delta\omega \approx \gamma$.

Uitwerkingen Opgave 2

-a) $\cos^4 kx = (\cos^2 kx)^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2kx)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2kx + \frac{1}{4}\cos^2 2kx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2kx + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4kx) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2kx + \frac{1}{8}\cos 4kx$.
Dus $Z(x,y) = D + \frac{3}{8}H + \frac{1}{2}H\cos 2kx + \frac{1}{8}H\cos 4kx$.
Alle Fourier-componenten zijn dus nul, behalve $\frac{1}{2}a_0 = D + \frac{3}{8}H$; $a_2 = \frac{1}{2}H$; $a_4 = \frac{1}{8}H$.

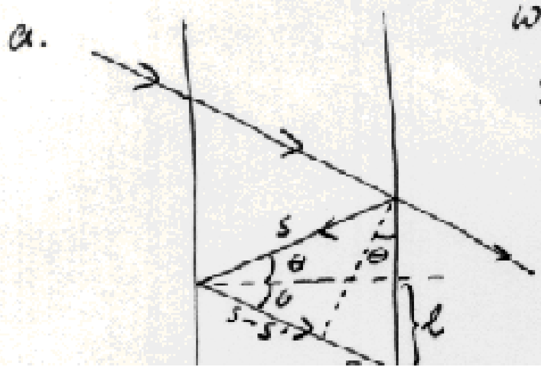
b) Voortplantingssnelheid (fasesnelheid!) van de individuele Fourier-componenten is $v_n = \omega_n/k_n$.
$\omega_n = C\sqrt{k_n}$ (dispersierelatie) en $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2n\pi}{L}$.
Derhalve $v_2 = C\sqrt{\frac{L}{4\pi}}$ en $v_4 = C\sqrt{\frac{L}{8\pi}}$.

-c) Omdat de voortplantingssnelheid van de beide Fourier-componenten in het golfpatroon verschillend is, verandert de faserelatie van deze componenten, en daarmee de vorm van het golfpatroon (dat verkregen wordt d.m.v. Fourier-synthese).

-d) Uit b) volgt dat de tweede Fourier-component de vierde Fourier-component inhaalt met een relatieve snelheid $v_2 - v_4 = (\sqrt{2} - 1)C\sqrt{\frac{L}{8\pi}}$.
Het golfpatroon heeft weer de oorspronkelijke vorm als het verschil in de afstand afgelegd door de tweede Fourier-component en de vierde Fourier-component gelijk is aan de golflengte van de vierde Fourier-component (immers dan zijn beide componenten weer in fase). Dus na een tijd τ waarvoor geldt $\tau(v_2 - v_4) = \lambda_4 = L/4$. Invullen van de gegeven waarden voor L en C levert τ=1.34 s.

Opgave 3. Uitwerking.

a.



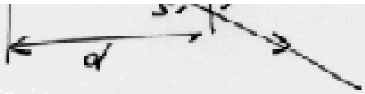
weglengte verschil: $2s - s'$

$s = \frac{d}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{l}{d}$

$\sin\theta = \frac{s'}{2d\tan\theta}$

$\Rightarrow s' = 2d\tan\theta\sin\theta = \frac{2d\sin^2\theta}{\cos\theta}$



$\Rightarrow$ weglengte verschil $= \dfrac{2d}{\cos\theta} - \dfrac{2d\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$= 2d\cos\theta$

$\Rightarrow \delta = \dfrac{2\pi \cdot 2d\cos\theta}{\lambda} = \dfrac{4\pi d\cos\theta}{\lambda}$

(P.S. Weliswaar bij reflectie een fasesprong van π, maar dat gebeurt 2x, dus 2π!)

b $\delta = 2\pi m$

$\lambda m = 2d\cos\theta$

c
$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 m = 2d\cos\theta_1 \\ \lambda_2 n = 2d\cos\theta_1 \end{array}\right\} \lambda_1 m = \lambda_2 n \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 (m+201) = 2d\cos\theta_2 \\ \lambda_2 (n+200) = 2d\cos\theta_2 \end{array}\right\} \lambda_1 (m+201) = \lambda_2 (n+200) \quad (2)$$

d Gebruik (1) en (2) en vul in $\lambda_1 = 600 \Rightarrow \lambda_2 = 603$ nm

e overgang van $n = 3$ ~~...~~ naar $n = 1,206$ of $n = 2.1$

In beide gevallen $n = \dfrac{n_2}{n_1} < 1 \Rightarrow$ Interne reflectie

f als $\theta > \theta_{crit}$: TM-licht wordt volledig gereflecteerd

als $\theta = \theta_{brewster}$: TM-licht wordt volledig doorgelaten

g Voor λ_1 $\theta_{brewster} = 21,9°$

~~θ_{grens}~~ $\theta_{crit} = 23,7°$

λ_2 $\theta_{brewster} = 35°$

~~θ~~ $\theta_{crit} = 44,43°$

als $\theta = 35° \Rightarrow$ λ_2 wordt volledig doorgelaten

λ_1 wordt volledig gereflecteerd.

4 a) $\vec{P} = -Ne\vec{z}$ $\quad -e\vec{E} = s\vec{z}$ $\quad \rightarrow \quad \vec{P} = \frac{Ne^2}{s}\vec{E}$

b) $m\frac{d^2\vec{z}}{dt^2} + b\frac{d\vec{z}}{dt} + s\vec{z} = -e\vec{E}$ $\quad$ met $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ $\quad \vec{z} = \vec{z}_0 e^{-i\omega t}$

$\rightarrow -m\omega^2\vec{z} + b\cdot -i\omega\vec{z} + s\vec{z} = -e\vec{E}$ $\quad \rightarrow \quad \vec{P} = -Ne\vec{z} = \frac{Ne^2}{-m\omega^2 - i\omega b + s}\vec{E}$

c) $\nabla^2\vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}_0\left(e^{i(Kz-\omega t)}\right) = -K^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega b/m}\right)\cdot -\omega^2\vec{E}$

$\rightarrow \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{b}{m}\omega}\right)$ $\quad K = k + i\alpha$ $\quad \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \cdot e^{-\alpha z}$

golfgetal $\quad$ uitdoving

d) Als $\omega \approx \omega_0$, want $\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{b}{m}\omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{b}{m}\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{b}{m}\omega)^2}$ $\rightarrow \alpha$ maximaal als $\omega \sim \omega_0$.